УДК 514.763.7

К. Р. Джукашев

ОБ ЭЛАСТИЧНЫХ ТРИ-ТКАНЯХ С ТЕНЗОРОМ КРУЧЕНИЯ РАНГА 1

Аннотация. *Актуальность и цели.* Многомерные три-ткани, образованные на гладком многообразии тремя слоениями одинаковой размерности, являются геометрической интерпретацией функций двух переменных и имеют многочисленные приложения, в частности, в теории дифференциальных уравнений, в теоретической физике и в теории квазигрупп и луп. Одними из наименее изученных классов три-тканей являются эластичные три-ткани (ткани E), соответствующие изотопически инвариантному классу луп с тождеством эластичности $(xy)x = x(yx)$. Целью данной работы является исследование эластичных три-тканей, у которых производная алгебра от алгебры, определяемой тензором кручения, является одномерной. *Материалы и методы.* Для исследования три-тканей E используется метод внешних форм и подвижного репера Эли Картана, модифицированный Г. Ф. Лаптевым. В статье используются структурные уравнения, полученные с помощью этого метода. *Результаты.* Найдена система структурных уравнений, определяющая этот класс тканей, доказана ее замкнутость относительно внешнего дифференцирования. Таким образом, доказано, что нетривиальные эластичные ткани с тензором кручения ранга 1 существуют. Найдены соотношения на тензоры этой ткани и доказано, что существует адаптированный репер, в котором тензор кривизны также имеет ранг 1, причем производные алгебры от алгебр, определяемых тензорами кручения и кривизны, лежат в одном одномерном пространстве. *Выводы.* Метод Картана – Лаптева позволяет эффективно исследовать специальные классы многомерных три-тканей.

Ключевые слова: многомерные три-ткани, репер Эли Картана, метод Картана – Лаптева.

K. R. Dzhukashev

ON ELASTIC 3-WEBS WITH CLASS 1 TORSION TENSOR

Abstract. *Background.* Multidimensional 3-webs, produced on the smooth manifold by three layerings ofsimilar dimensionality, are the geometric interpretation of the function of two variables and have multiple applications, for example, in the theory of differential equations, in theoretical physics and in the theory of quasi-groups and loops. One of the least studied classes of 3-webs are the elastic 3-webs (E webs), isotopically corresponding to the invariant class of loops with the elasticity identity $(xy)x = x(yx)$. The study is aimed at investigating elastic 3-webs, the algebra of which, derived from the algebra determined by the torsion tensor, is a one-dimensional one. *Materials and methods.* To research E 3-webs the author uses the Elie Cartan method of external forms and moving frames, modified by G.F. Laptev. The article describes the usage of structural equations obtained by the said method. *Results.* The author discovered a system of structural equations, that determines the class of webs, proved its closure in relation to external differentiation. Thus, it is proved that nontrivial elastic webs with class 1 torsion tensor exist. The researcher discovered correlations to tensors of the said web and proved the existence of an adaptive frame, in which the turvature tensor also has class 1, and the algebra, derived from the algebra determined by the torsion tensor, is in the same one-dimesional space. *Conclusion.* the method of Cartan – Laptev allows effective researching of special classes of multidimensional 3-webs.

Key words: multidimensional 3-webs, Elie Cartan frame, method of Cartan - Laptev.

Введение

K-ткань, образованная *k* гладкими слоениями на гладком многообразии, – традиционный объект изучения в дифференциальной геометрии. Тканям посвящено много работ, в которых рассматриваются их свойства, проводится классификация и т.п. В. Бляшке первым выделил как объект специального рассмотрения инцидентностные свойства тканей, т.е. начал рассматривать ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов. Этой проблематикой занимались его ученики и коллеги, в частности С. Черн, которому принадлежит первое изложение дифференциально-топологической теории многомерных три-тканей, образованных тремя слоениями λ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, размерности r на $2r$-мерном многообразии X. Эта теория получила развитие в трудах М. А. Акивиса и его учеников. Детальное изложение основных результатов по теории три-тканей впервые было дано в [1], там же имеется обширная библиография. В книге [2] этих же авторов добавлены новые результаты, полученные в течение последних двух десятилетий.

Наиболее обширное и важное приложение теории тканей – изотопически инвариантная теория квазигрупп и луп. Связь между этими объектами состоит в том, что каждому тождеству в квазигруппе или лупе отвечает замыкание конфигураций определенного типа на три-ткани. Основные классы тканей связаны с простейшими тождествами – коммутативностью и различными вариантами ассоциативности. Эти классы детально описаны, и для них найдены адекватные тензорные характеристики. Исключение составляют так называемые эластичные ткани или ткани E, которым соответствует тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$. Этим тканям посвящены всего две работы [3, 4]. В первой доказано, что ткани E образуют собственный подкласс средних тканей Бола и проведена полная классификация шестимерных тканей E. В работе [4] доказано, что соотношения, определяемые тождеством эластичности в пятой дифференциальной окрестности, вытекают из соотношений, связывающих тензоры четвертой дифференциальной окрестности этой ткани.

В настоящей статье методом Картана – Лаптева исследуются ткани E, у которых производная алгебра A' от алгебры A, определяемой тензором кручения ткани E, является одномерной. Доказывается, что у таких тканей тензор кривизны также имеет ранг 1, причем одномерная производная алгебра B' от определяемой им тернарной алгебры B задана на том же пространстве, что и алгебра A'. Найдены структурные уравнения исследуемого класса тканей E в некотором специальном адаптированном репере.

1. Пусть три-ткань W образована тремя слоениями λ_α, α=1,2,3, размерности r на $2r$-мерном многообразии X. Согласно [1] зададим слоения λ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, вполне интегрируемыми системами форм Пфаффа $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$ и $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, i=1,..,r , где формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ образуют кобазис на многообразии X. Тогда структурные уравнения три-ткани имеют следующий вид [1]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k; \quad (1)$$

$$d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k; \quad (2)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \quad (3)$$

Внешнее дифференцирование структурных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям на тензоры кручения и кривизны $a = (a_{jk}^i)$ и $b = (b_{jkl}^i)$:

$$\nabla a_{jk}^i = b_{[j|l|k]}^i \underset{1}{\omega}^l + b_{[jk]l}^i \underset{2}{\omega}^l, \quad (4)$$

$$\nabla b_{jkl}^i = \underset{1}{c}{}_{jklm}^i \underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{c}{}_{jklm}^i \underset{2}{\omega}^m, \quad (5)$$

причем тензоры a, b, $\underset{1}{c}$ и т.д. связаны некоторыми соотношениями, а ∇ – дифференциальный оператор, определяемый формулой [1]:

$$\nabla a_{jk}^i \overset{def}{=} da_{jk}^i + a_{jk}^m \omega_m^i - a_{mk}^i \omega_j^m - a_{jm}^i a_k^m.$$

Эластичной три-тканью, или тканью, называется три-ткань, в координатных лупах которой выполняется тождество эластичности:

$$(xy)x = x(yx), \quad (6)$$

где xy – операция в координатной лупе ткани [1].

В работе [2] доказано, что ткани E образуют подкласс средних тканей Бола и их основные тензоры связаны соотношением

$$b(x, y, [xy]) = 0. \quad (7)$$

Так как ткани являются средними тканями Бола, то их тензоры связаны следующими соотношениями [1]:

$$b(x, y, z) = -b(x, z, y); \quad (8)$$

$$b(x, y, z) + b(y, z, x) + b(z, x, y) = 2\left([[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y]\right); \quad (9)$$

$$b\left(x, y, [zt]\right) - b\left(y, x, [zt]\right) + b\left([xy], z, t\right) = \left[zb(y, z, t)\right] - \left[yb(x, z, t)\right]; \quad (10)$$

$$\underset{1}{c}(x, y, z, t) = -\underset{2}{c}(x, y, z, t) = -b\left(x, [zt], y\right) + b\left(x, [yz], t\right) + b\left(x, [yt], z\right). \quad (11)$$

Для тканей Бола уравнения (4) и (5) примут следующий вид [1]:

$$\nabla a_{jk}^i = -b_{[jk]l}^i \left(\underset{1}{\omega}^l - \underset{2}{\omega}^l\right); \quad (12)$$

$$\nabla b^i_{jkl} = c^i_{jklm}\left(\underset{1}{\omega}^m - \underset{2}{\omega}^m\right), \tag{13}$$

где обозначено $\underset{1}{c} = -\underset{2}{c} = c$.

Будем записывать умножение в алгебре A, определяемой тензором кручения, в виде $z = [xy]$. Тогда равенство (7) можно переписать в виде $b(x,y,z) = 0$, где $z = [xy]$ – элемент производной алгебры A'. Ввиду этого имеет смысл классифицировать эластичные три-ткани по размерности алгебры A'.

В данной работе мы изучим эластичные три-ткани, для которых $dim\, A' = 1$. Будем говорить в этом случае, что тензор кручения имеет ранг 1.

Выберем семейство адаптированных реперов ткани таким образом, чтобы пространство A' определялось базисным вектором e_1, тогда

$$a^{\hat{i}}_{jk} = 0, \text{ где } \hat{i} \neq 1. \tag{14}$$

1. Рассмотрим соотношение (7). Перепишем его в координатной форме:

$$b^i_{jkp}a^p_{lm} + b^i_{jmp}a^p_{lk} + b^i_{lkp}a^p_{jm} + b^i_{lmp}a^p_{jk} = 0. \tag{15}$$

Ввиду (14) данное равенство запишется в виде

$$b^i_{jk1}a^1_{lm} + b^i_{jm1}a^1_{lk} + b^i_{lk1}a^1_{jm} + b^i_{lm1}a^1_{jk} = 0. \tag{16}$$

1) Полагая в (16) $j = l$, $k = m$, получим

$$b^i_{jk1}a^1_{jk} = 0 \text{ (тензоры не суммируются).} \tag{17}$$

Так как мы рассматриваем ткань ранга 1, то найдутся такие j, k, что $a^1_{jk} \neq 0,$ следовательно, $b^i_{jk1} = 0, \forall i.$

2) Положим в (16) $j = l$, получим

$$b^i_{jk1}a^1_{jm} + b^i_{jm1}a^1_{jk} = 0. \tag{18}$$

Так как $a^1_{jk} \neq 0,\ b^i_{jk1} = 0$, то $b^i_{jm1} = 0, \forall i, m.$

3) Положим в (16) $k = m$:

$$b^i_{jk1}a^1_{lk} + b^i_{lk1}a^1_{jk} = 0. \tag{19}$$

Так как $a^1_{jk} \neq 0,\ b^i_{jk1} = 0$, то $b^i_{lk1} = 0, \forall i, l.$

4) Рассмотрим (16):

$$b^i_{jk1}a^1_{lm} + b^i_{jm1}a^1_{lk} + b^i_{lk1}a^1_{jm} + b^i_{lm1}a^1_{jk} = 0.$$

Так как $a^1_{jk} \neq 0,\ b^i_{jm1} = 0$, $b^i_{lk1} = 0$, то $b^i_{lm1} = 0, \forall i, l, m.$

Таким образом, учитывая (8), приходим к следующему утверждению.

Предложение 1. *Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру* (14), *то компоненты тензора кривизны связаны соотношениями* $b^i_{jk1} = b^i_{j1k} = 0.$

Подстановка полученного результата в (16) дает нам тождество. Таким образом, новых соотношений из (16) мы не получим.

Рассмотрим равенства (9), записанные в координатной форме:

$$b^i_{jkl} + b^i_{klj} + b^i_{ljk} = 2a^m_{jk}a^i_{ml} + 2a^m_{kl}a^i_{mj} + 2a^m_{lj}a^i_{mk}. \qquad (20)$$

Положив здесь $j = 1$ и используя (14), получим:

$$b^i_{1kl} + b^i_{kl1} + b^i_{l1k} = 2a^1_{1k}a^i_{1l} + 2a^1_{kl}a^i_{11} + 2a^1_{l1}a^i_{1k}. \qquad (21)$$

Используя предложение 1 и соотношение (8), придем к равенствам

$$b^i_{1kl} = 0. \qquad (22)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру* (14), *то для тензора кривизны этой ткани выполняются соотношения* $b^i_{1lm} = 0$.

Таким образом, из соотношения (9) приходим к следующим выражениям:

$$b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} + b^1_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}} + b^1_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}} = 2a^1_{\hat{j}\hat{k}}a^1_{1\hat{l}} + 2a^1_{\hat{k}\hat{l}}a^1_{1\hat{j}} + 2a^1_{\hat{l}\hat{j}}a^i_{1\hat{k}}; \qquad (23)$$

$$b^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} + b^{\hat{i}}_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}} + b^{\hat{i}}_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}} = 0. \qquad (24)$$

Рассмотрим соотношения (10), записанные в координатной форме:

$$b^i_{jpk}a^p_{lm} - b^i_{kpj}a^p_{lm} = a^p_{jk}b^i_{plm} - a^i_{pk}b^p_{jlm} - a^i_{jp}b^p_{klm}. \qquad (25)$$

Преобразуем их при помощи соотношений (14) с учетом предложений 1 и 2. Получим

$$a^i_{kp}b^p_{jlm} = a^i_{jp}b^p_{klm}. \qquad (26)$$

Найдем значение ковариантной производной тензора кривизны. Для этого воспользуемся формулой (11):

$$c^i_{jklm} = -b^i_{jpk}a^p_{lm} + b^i_{jpm}a^p_{kl} + b^i_{jpl}a^p_{km}. \qquad (27)$$

Учитывая (14), получаем

$$c^i_{jklm} = -b^i_{j1k}a^1_{lm} + b^i_{j1m}a^1_{kl} + b^i_{j1l}a^1_{km}. \qquad (28)$$

В силу предложения 1 имеем $c^i_{jklm} = 0$. Доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру* (14), *то тензор кривизны является ковариантно постоянным.*

2. Рассмотрим структурные уравнения рассматриваемой три-ткани. С учетом найденных ограничений на компоненты тензоров эти уравнения примут следующий вид:

$$d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^1_j + a^1_{jk}\,\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k; \tag{29}$$

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat i} = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^{\hat i}_j; \tag{30}$$

$$d\underset{2}{\omega}^1 = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^1_j - a^1_{jk}\,\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k; \tag{31}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\hat i} = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^{\hat i}_j; \tag{32}$$

$$d\omega^i_1 = \omega^k_1 \wedge \omega^i_k; \tag{33}$$

$$d\omega^i_{\hat j} = \omega^k_{\hat j} \wedge \omega^i_k + b^i_{\hat j\hat k\hat l}\,\underset{1}{\omega}^{\hat k} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat l}, \tag{34}$$

где $\hat i, \hat j, \hat k \neq 1$. Уравнение (39) означает, что система пфаффовых уравнений $\omega^i_1 = 0$ является вполне интегрируемой. Следовательно, можно сузить семейство реперов, положив в структурных уравнениях $\omega^i_1 = 0$. Получим

$$d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^{\hat j} \wedge \omega^1_{\hat j} + a^1_{jk}\,\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k; \tag{35}$$

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat i} = \underset{1}{\omega}^{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_{\hat j}; \tag{36}$$

$$d\underset{2}{\omega}^1 = \underset{2}{\omega}^{\hat j} \wedge \omega^1_{\hat j} - a^1_{jk}\,\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k; \tag{37}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\hat i} = \underset{2}{\omega}^{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_{\hat j}; \tag{38}$$

$$d\omega^i_{\hat j} = \omega^{\hat k}_{\hat j} \wedge \omega^i_{\hat k} + b^i_{\hat j\hat k\hat l}\,\underset{1}{\omega}^{\hat k} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat l}. \tag{39}$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения (12). С учетом найденных соотношений они примут вид

$$\nabla a^1_{1\hat k} = da^i_{1k} - a^1_{1\hat m}\omega^{\hat m}_1 = 0; \tag{40}$$

$$\nabla a^1_{\hat j\hat k} = da^1_{\hat j\hat k} - a^1_{m\hat k}\omega^m_{\hat j} - a^1_{\hat j m}\omega^m_{\hat k} = -b^1_{[\hat j\hat k]\hat l}\left(\underset{1}{\omega}^{\hat l} - \underset{2}{\omega}^{\hat l}\right), \tag{41}$$

$$0 = -b^{\hat i}_{[\hat j\hat k]\hat l}\left(\underset{1}{\omega}^{\hat l} - \underset{2}{\omega}^{\hat l}\right). \tag{42}$$

Так как формы $\underset{1}{\omega}^{\hat l}$ и $\underset{2}{\omega}^{\hat l}$ являются линейно независимыми, то $b^{\hat i}_{\hat j\hat k\hat l} = b^{\hat i}_{\hat k\hat j\hat l}$. А поскольку $b^i_{jkl} = -b^i_{kjl}$, то $b^{\hat i}_{jkl} = 0$, так как

$$b^{\hat{i}}_{jkl} = b^{\hat{i}}_{kjl} = -b^{\hat{i}}_{klj} = -b^{\hat{i}}_{lkj} = b^{\hat{i}}_{ljk} = b^{\hat{i}}_{jlk} = -b^{\hat{i}}_{jkl}.$$

Теорема 1. Если эластичная три-ткань E имеет тензор кручения ранга 1, то найдется такой адаптированный репер, в котором тензор кривизны ткани E также имеет ранг 1, причем производные алгебры от алгебр, определяемых этими тензорами, определены на одном и том же одномерном пространстве.

С учетом полученных соотношений структурные уравнения рассматриваемой ткани E принимают следующий вид:

$$d\underset{1}{\omega}^{1} = \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^{1}_{\hat{j}} + a^{1}_{jk}\, \underset{1}{\omega}^{j} \wedge \underset{1}{\omega}^{k}; \tag{43}$$

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} = \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{i}}_{\hat{j}}; \tag{44}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{1} = \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^{1}_{\hat{j}} - a^{1}_{jk}\, \underset{2}{\omega}^{j} \wedge \underset{2}{\omega}^{k}; \tag{45}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\hat{i}} = \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{i}}_{\hat{j}}; \tag{46}$$

$$d\omega^{1}_{\hat{j}} = \omega^{\hat{k}}_{\hat{j}} \wedge \omega^{1}_{\hat{k}} + b^{1}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\, \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}; \tag{47}$$

$$d\omega^{\hat{i}}_{\hat{j}} = \omega^{\hat{k}}_{\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{i}}_{\hat{k}}. \tag{48}$$

Уравнение (50) показывает, что система уравнений $\omega^{\hat{i}}_{\hat{j}} = 0$ является вполне интегрируемой. Значит, можно сузить семейство адаптированных реперов, положив $\omega^{\hat{i}}_{\hat{j}} = 0$. В результате структурные уравнения ткани E принимают вид

$$d\underset{1}{\omega}^{1} = \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^{1}_{\hat{j}} + a^{1}_{jk}\, \underset{1}{\omega}^{j} \wedge \underset{1}{\omega}^{k}; \tag{49}$$

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} = 0; \tag{50}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{1} = \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^{1}_{\hat{j}} - a^{1}_{jk}\, \underset{2}{\omega}^{j} \wedge \underset{2}{\omega}^{k}; \tag{51}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\hat{i}} = 0; \tag{52}$$

$$d\omega^{1}_{\hat{j}} = b^{1}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\, \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}. \tag{53}$$

Дифференциальные уравнения на тензор кручения (41)–(42) примут вид

$$\nabla a^1_{1\hat{k}} = da^i_{1k} = 0; \tag{54}$$

$$\nabla a^1_{\hat{j}\hat{k}} = da^1_{\hat{j}\hat{k}} - a^1_{1\hat{k}}\omega^1_{\hat{j}} - a^1_{\hat{j}1}\omega^1_{\hat{k}} = -b^1_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}\left(\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} - \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}\right). \tag{55}$$

Из первого уравнения следует $a^i_{1k} = \mathrm{const}$.

Из дифференциальных уравнений на тензор кривизны остаются следующие:

$$\nabla b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} = db^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} = 0.$$

Из них следует, что

$$b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} = 0.$$

3. Проверим полученную систему структурных уравнений на замкнутость. Очевидно, что внешнее дифференцирование уравнений (50), (52), (53) приводит к тождествам. Рассмотрим уравнение (49), переписанное в следующей форме:

$$d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^1_{\hat{j}} + 2a^1_{1\hat{k}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + a^1_{\hat{j}\hat{k}}\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}. \tag{56}$$

Продифференцируем его внешним образом, получим:

$$0 = d\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^1_{\hat{j}} - \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge d\omega^1_{\hat{j}} + 2a^1_{1\hat{k}}d\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} - 2a^1_{1\hat{k}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge d\underset{1}{\omega}^{\hat{k}} +$$

$$+da^1_{\hat{j}\hat{k}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + a^1_{\hat{j}\hat{k}}d\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} - a^1_{\hat{j}\hat{k}}\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge d\underset{1}{\omega}^{\hat{k}}.$$

Используя структурные уравнения, находим

$$0 = -\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\underset{1}{\omega}^{\hat{k}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{l}} + 2a^1_{1\hat{k}}(\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^1_{\hat{j}} + 2a^1_{1\hat{j}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} +$$

$$+a^1_{\hat{j}\hat{p}}\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{p}}) \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + da^1_{\hat{j}\hat{k}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}.$$

После преобразований получаем

$$0 = -\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\underset{1}{\omega}^{\hat{k}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{l}} + 2a^1_{1\hat{k}}\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^1_{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} +$$

$$+4a^1_{1\hat{k}}a^1_{1\hat{j}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + 2a^1_{1\hat{k}}a^1_{\hat{j}\hat{p}}\underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{p}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + da^1_{\hat{j}\hat{k}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}.$$

Преобразуем далее:

$$0 = \left(-b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\underset{2}{\omega}^{\hat{l}} - 2a^1_{1\hat{k}}\omega^1_{\hat{j}} + 4a^1_{1\hat{k}}a^1_{1\hat{j}}\underset{1}{\omega}^1 - 2a^1_{1\hat{k}}a^1_{\hat{j}\hat{p}}\underset{1}{\omega}^{\hat{p}} + da^1_{\hat{j}\hat{k}}\right) \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}. \tag{57}$$

Значение найдем из уравнения (55):

$$da^1_{\hat{j}\hat{k}} = a^1_{1\hat{k}}\omega^1_{\hat{j}} + a^1_{\hat{j}1}\omega^1_{\hat{k}} - b^1_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}\left(\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} - \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}\right). \tag{58}$$

Подставляя (58) в (57), получаем

$$0 = \left(-b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\underset{2}{\omega}^{\hat{l}} - 2a^1_{1\hat{k}}\omega^1_{\hat{j}} + 4a^1_{1\hat{k}}a^1_{1\hat{j}}\underset{1}{\omega}^1 - 2a^1_{1\hat{k}}a^1_{\hat{j}\hat{p}}\underset{1}{\omega}^{\hat{p}} + \right.$$

$$\left. + a^1_{1\hat{k}}\omega^1_{\hat{j}} + a^1_{\hat{j}1}\omega^1_{\hat{k}} - b^1_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}\left(\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} - \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}\right)\right) \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}.$$

Далее альтернируем по j, k:

$$0 = \left(-b^1_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}\underset{2}{\omega}^{\hat{l}} - 2a^1_{1[\hat{k}}\omega^1_{\hat{j}]} + 4a^1_{1[\hat{k}|}a^1_{1|\hat{j}]}\underset{1}{\omega}^1 - 2a^1_{1[\hat{k}}a^1_{\hat{j}]\hat{p}}\underset{1}{\omega}^{\hat{p}} + \right.$$

$$\left. + a^1_{1[\hat{k}}\omega^1_{\hat{j}]} + a^1_{[\hat{j}|1}\omega^1_{|\hat{k}]} - b^1_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}\left(\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} - \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}\right)\right) \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}.$$

После упрощения получим

$$0 = \left(-2a^1_{1[\hat{k}}a^1_{\hat{j}]\hat{p}}\underset{1}{\omega}^{\hat{p}} - b^1_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}\underset{1}{\omega}^{\hat{l}}\right) \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}; \quad 0 = \left(2a^1_{1[\hat{k}}a^1_{\hat{j}]\hat{l}} + b^1_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}\right)\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}.$$

Теперь альтернируем по l, j, k:

$$0 = \left(-2a^1_{[\hat{l}\hat{j}|}a^1_{1|\hat{k}]} + b^1_{[\hat{j}\hat{k}\hat{l}]}\right)\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}.$$

Данное уравнение тождественно удовлетворяется в силу тождеств Якоби (23). Аналогично, уравнение (51) при дифференцирование дает тождество.

Таким образом, найденная нами система структурных уравнений (49)–(53) является замкнутой. Следовательно, рассматриваемые ткани E существуют.

Список литературы

1. **Akivis, M.** A Geometry and Algebra of Multidimensional Three-webs / M. A. Akivis, A. M. Shelekhov. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht ; Boston ; London, 1992. – P. 375.
2. **Акивис, М. А.** Многомерные три-ткани и их приложения : моногр. / М. А. Акивис, А. М. Шелехов. – Тверь : Изд-во ТГУ, 2010. – 308 с.
3. **Шелехов, А. М.** О три-тканях с эластичными координатными лупами / А. М. Шелехов ; Калининский гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 02.12.1987. № 8465-В87. – Калинин, 1987.
4. **Balandina, G. A.** On general theory of elastic webs / G. A. Balandina, A. M. Shelekhov // Webs and Quasigroups. – Tver : Tver State University, 1995. – P. 62–74.

References

1. Akivis M. A., Shelekhov A. M. *Geometry and Algebra of Multidimensional Three-webs*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston; London, 1992, p. 375.

2. Akivis M. A., Shelekhov A. M. *Mnogomernye tri-tkani i ikh prilozheniya: monogr.* [Multidimensional 3-webs and application thereof: monograph]. Tver: Izd-vo TGU, 2010, 308 p.
3. Shelekhov A. M. *O tpi-tkanyakh s elastichnymi koopdinatnymi lupami* [On 3-webs with elastic coordinate loops]. Kalininskiy gos. un-t. Dep. v VINITI 02.12.1987. № 8465-V87. Kalinin, 1987.
4. Balandina G. A., Shelekhov A. M. *Webs and Quasigroups*. Tver: Tver State University, 1995, pp. 62–74.

Джукашев Камиль Рамилевич
аспирант, Тверской государственный университет (Россия, г. Тверь, ул. Желябова, 33)

Dzhukashev Kamil' Ramilevich
Postgraduate student, Tver State University (33 Zhelyabova street, Tver, Russia)

E-mail: dzhukashev@gmail.com

УДК 514.763.7

Джукашев, К. Р.

Об эластичных три-тканях с тензором кручения ранга 1 / К. Р. Джукашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 61–70.